

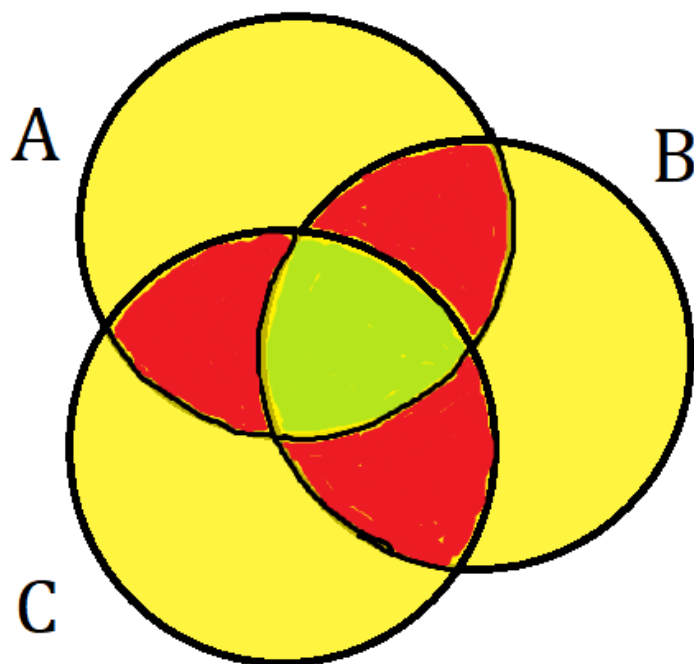
Условие:

Вероятность события А – а. Вероятность события В – b. Вероятность события С – с. Найти

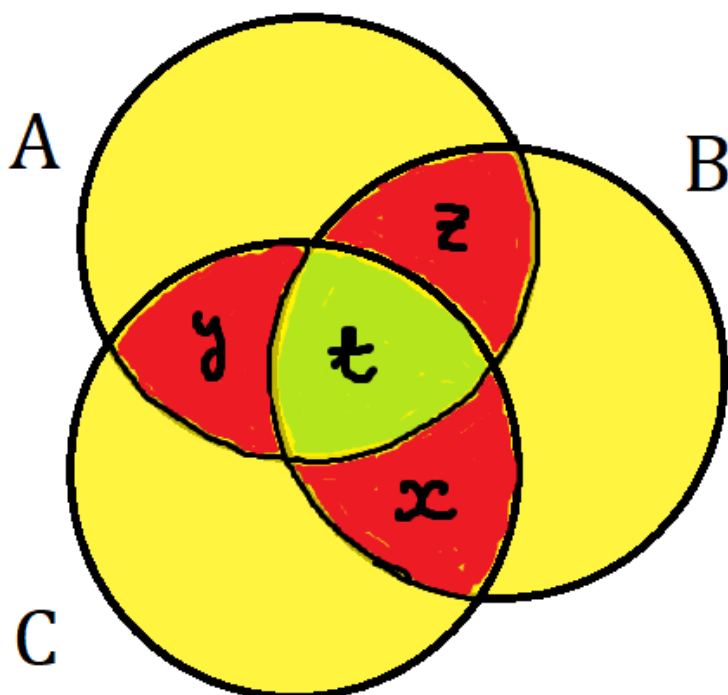
а) наименьшую возможную вероятность АВС

б) наибольшую возможную вероятность АВС при условии, что верно хотя бы одно из А,В,С (в п. а) такого условия нет).

Рисуем круги. Давайте покрасим области:



Обозначим вероятность в красных областях как x, y, z , а в зелёной области как t :



Нам, таким образом, надо минимизировать или максимизировать t .

Пишем формулу включения-исключения:

$$P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)+P(\text{белой области}) = 1$$
$$a + b + c - (x + t) - (y + t) - (z + t) + t = 1 - p(\text{белой области})$$

Откуда

$$t = \frac{a + b + c - 1 - (x + y + z) + p(\text{белой области})}{2}$$

a, b, c фиксированы, и величине (малость) t зависит лишь от x, y, z и p(белой области).

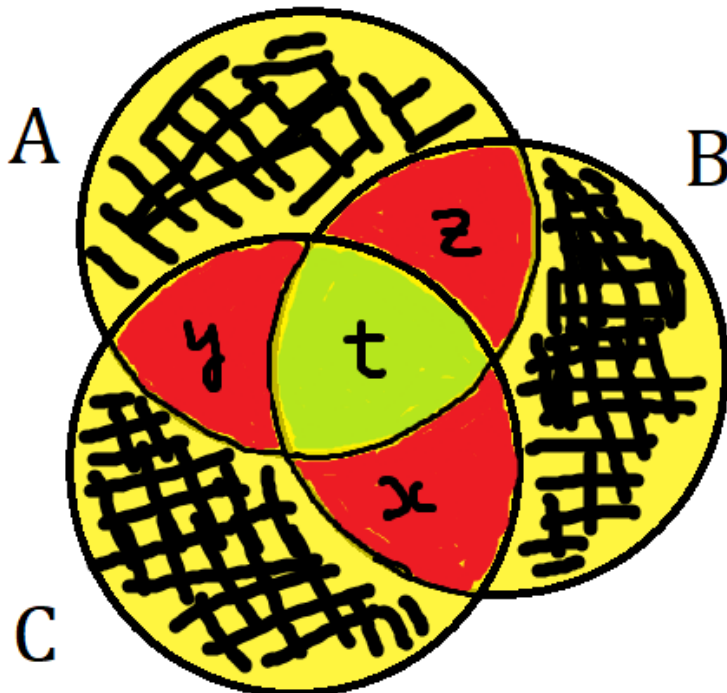
(пункт а): Если t нужно минимизировать, то x, y, z нужно максимизировать, а p(белой области) минимизировать (поэтому сразу положим её равной 0):

$$t = \frac{a + b + c - 1 - (x + y + z)}{2}$$

(пункт б):

Если t нужно максимизировать, то, наоборот, x, y, z нужно минимизировать. p(белой области) там также =0, но уже в силу условия задачи.

Рассмотрим сначала пункт а. Коль x, y, z должны быть как можно больше, то мы должны по максимуму вероятность загонять в красные области. А так как вероятность – штука дефицитная (всего единица на все-все-все области), то в жёлтых областях вероятности быть не должно. Давайте закрасим эти области чёрным, подчеркнув, что вероятности там нет:



Получаем, что вся вероятность содержится всего в четырёх областях – трёх красных и одной зелёной. А тут мы уже можем записать систему:

$$\begin{cases} y + t + z = a \\ x + t + z = b \\ x + t + y = c \\ x + y + z + t = 1 \end{cases}$$

Как получается эта система? Первое уравнение- вероятность А: это две красные области, у и z, и одна зелёная – х. Аналогично второе уравнение о вероятности В, третье о вероятности С, а четвёртое о сумме всех вероятностей.

По очереди вычитая все уравнения из четвёртого, получаем

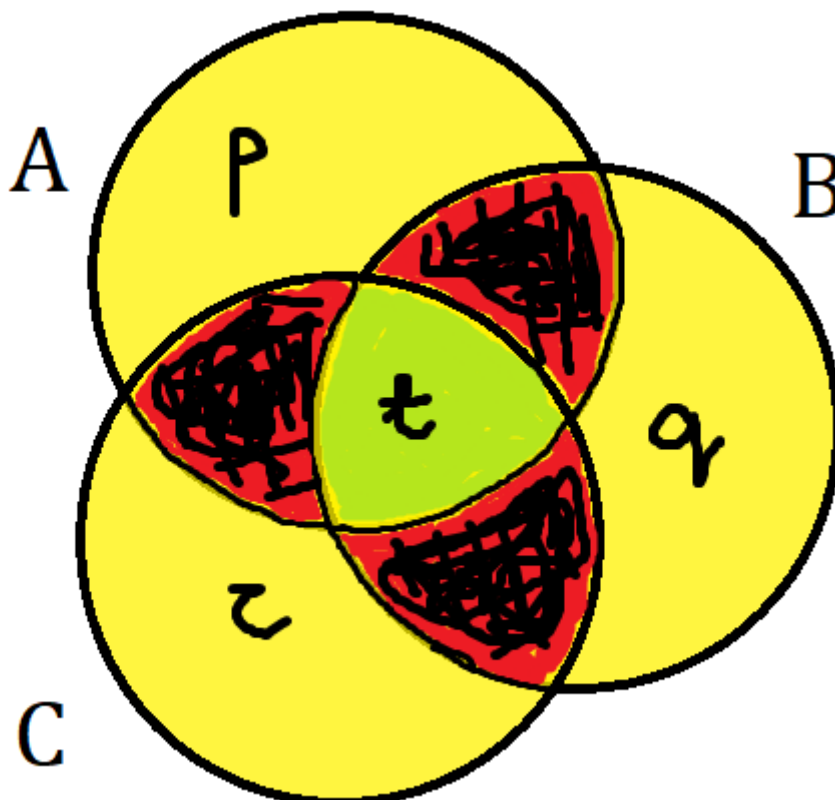
$$\begin{cases} x = 1 - a \\ y = 1 - b \\ z = 1 - c \\ x + y + z + t = 1 \end{cases}$$

Откуда $3 - a - b - c + t = 1 \Rightarrow t = a + b + c - 2$

Пункт а) решён.

Пункт б):

Тут, напротив, нужно х, у, z минимизировать, т.е. по максимуму выдавливать вероятность из красных областей в соседние чёрные. Тогда в красных областях вероятности не останется совсем! Закрасим уже их чёрным:



А вероятности в жёлтых областях обозначим как p,q,r соответственно. Тогда будет система

$$\begin{cases} p + t = a \\ q + t = b \\ r + t = c \\ p + q + r + t = 1 \end{cases}$$

Аналогично первое уравнение про вероятность А, второе про вероятность В, третье про вероятность С, четвертое про сумму всех вероятностей.

Сложим первые 3 уравнения, получим $p + q + r + 3t = a + b + c$. Вычитая четвертое, получим $2t = a + b + c - 1 \Rightarrow t = \frac{a+b+c-1}{2}$

Ответ:

$$\begin{aligned} \min t &= a + b + c - 2 \\ \max t &= \frac{a + b + c - 1}{2} \end{aligned}$$

Например, для $a=0,69$ $b=0,79$ $c=0,82$ $\min t$ будет 0,3, а $\max t$ будет 0,65.